In diesem Lernbereich werden Exponentialfunktionen zur Basis e eingeführt sowie ihre Verknüpfungen und Verkettungen mit ganzrationalen Funktionen. Diese Funktionen werden abgeleitet und entsprechende Exponentialgleichungen werden gelöst. Dieses Onlinematerial gibt Hinweise zur Komplexität der zu behandelnden Gleichungen, zu der Frage, was davon hilfsmittelfrei beherrscht werden sollte und wie die Hilfsmittel zur Lösung eingesetzt werden. Außerdem wird der notwendige Umfang der Behandlung des natürlichen Logarithmus erläutert. Schließlich wird eingegrenzt, was unter einfachen Fällen additiver und multiplikativer Verknüpfung zu verstehen ist.

Exponentialgleichungen lösen

Im gA sollten in folgenden Fällen Exponentialgleichungen auch hilfsmittelfrei gelöst werden können:

1) Nullstellenprobleme, wenn der Term bereits faktorisiert ist und ein Faktor der Term einer Polynomfunktion höchstens vom Grad 2 ist oder sich durch Ausklammern der Variablen eine solche Form herstellen lässt.
   Beispiele:
   $$0 = x^2 \cdot e^x + x \cdot e^x \iff 0 = (x^2 + x) \cdot e^x \implies x = 0 \lor x = -1$$
   $$0 = (x^3 - 4 \cdot x) \cdot e^x \iff 0 = x \cdot (x^2 - 4) \cdot e^x \implies x = 0 \lor x = -2 \lor x = 2$$
2) Gleichungen, die sich durch Term- und Äquivalenzumformungen einschließlich Logarithmieren auflösen lassen. Dabei stehen höchstens lineare Terme im Exponenten und keine Variablen in der Basis.

Weitere Beispiele dazu finden sich im Onlinematerial zu den hilfsmittelfreien Fertigkeiten.

Zur Behandlung des natürlichen Logarithmus

1) Für Gleichungen der Art: $e^x = 2$ wird der „Umkehroperator" ln zum Auflösen nach dem Exponenten x verwendet. Dabei ist beispielsweise $x = \ln(2) \approx 0{,}693$ der Wert des Exponenten von e, der die Potenz 2 ergibt. Einen Näherungswert bestimmt der Taschenrechner. Insofern liegt natürlich eine Funktion vor, die aber nicht weiter untersucht wird muss (etwa hinsichtlich Definitions- und Wertemenge oder Monotonieverhalten oder gar hinsichtlich ihrer Eineindeutigkeit).
2) Mithilfe dieses Operators können dann auch Gleichungen der Art: $e^{3 \cdot x + 1} = 2$ in der Form: $3 \cdot x + 1 = \ln(2) \implies x = \frac{\ln(2)-1}{3}$ gelöst werden, wobei ln(2) als fester Zahlenwert interpretiert wird.
3) Etwa zur hilfsmittelfreien Bildung der Ableitung ist es u.U. erforderlich, dass Exponentialfunktionen mit einer anderen Basis als e mithilfe des natürlichen Logarithmus in eine e-Funktion umgewandelt werden.

Komplexere Exponentiagleichungen werden mit den eingeführten digitalen Mathematikwerkzeugen gelöst. Dabei ist zu beachten, dass numerische Lösungswerkzeuge in der Regel bei einer Eingabe nur eine Lösung liefern, auch wenn es mehrere Lösungen gibt. Das heißt, man kann mit dem CAS stets das Lösungswerkzeug aus dem Algebramenü einsetzen. Mit dem GTR genügt das Lösungswerkzeug, wenn nur eine Lösung gesucht ist, sonst wäre der einfachste Fall das Lösungswerkzeug im Grafikmenü, wo man bei geeigneter Fensterwahl möglichst viele Null- oder Schnittstellen überblickt. Wenn in Leistungssituationen nach allen Lösungen gefragt wird, sollten in der Regel nur solche Funktionen betrachtet werden, die einen vollständigen Überblick über alle Nullstellen ermöglichen. Differenziertere alternative Überlegungen zu dieser Problematik werden im eA beschrieben.

Einfache Fälle additiver und multiplikativer Verknüpfung

Einfache Fälle additiver und multiplikativer Verknüpfungen von Polynom- und Exponentialfunktionen sind solche,

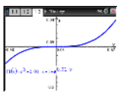
- in denen ein Summand eine Polynomfunktion und der andere eine Exponentialfunktion ist. In solchen Sachproblemen auftretende Gleichungen werden nur numerisch (auch im Grafikmenü) gelöst, weil andere Lösungen im Allgemeinen gar nicht möglich sind.
  Beispiele: $f(x) = -x^2 - x + e^x$, $f(x) = x^4 - e^x$
- in denen ein Faktor eine Polynomfunktion und der andere eine Exponentialfunktion ist.
  Beispiele: $f(x) = (1-x) \cdot e^x$, $f(x) = (x^2 + x) \cdot e^x$

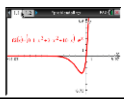
In all diesen Fällen werden die Terme der Polynomfunktion überschaubar bleiben.

Beispiele solcher Funktionen, die hilfsmittelfrei abzuleiten sind, finden sich im Onlinematerial zu den hilfsmittelfreien Fertigkeiten.

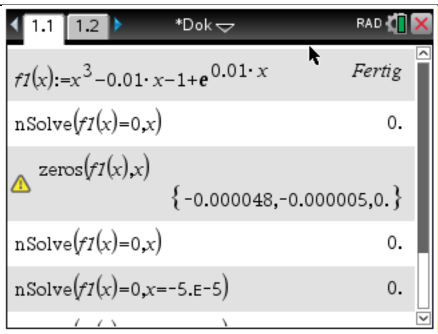
Problematische Fälle

Zwei Beispiele für Funktionen, deren Nullstellen man weder mit dem numerischen Lösungswerkzeug, noch im Grafikmenü sofort findet, sind die folgenden.





f1
Hier stößt man an die Grenzen des Einsatzes möglicher Lösungswerkzeuge. Von einzelnen Werkzeugen angegebene Lösungen sind kaum überprüfbar, auch im Grafikmenü oder mithilfe von Monotonieuntersuchungen ist eine endgültige Klärung kaum möglich. Die Angabe anderer Startwerte führt hier nicht zu weiteren Lösungen.



f2
Wenn eine Faktorisierung des Nullstellenproblems möglich ist, kann das Problem durch Betrachtung der einzelnen Faktoren in mehrere einfachere Nullstellenprobleme zerlegt werden. Es bieten sich etwa beim GTR Polynomwerkzeuge an, um alle Lösungen zu finden.